Cours de Décision dans l'incertain
Exercices : mercredi 23 avril 2021.

Exercice 1 On considère une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $(U_n, n \geq 1)$ prenant ces valeurs dans G (noter qu'il n'est pas nécessaire de supposer G fini). Soit E un ensemble fini et F une application de $E \times G$ dans E.

On construit, par récurrence, une suite $(X_n, n \geq 0)$ en posant, $X_0 = x \in E$ et

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}), n \geq 0.$$

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov et exprimer sa matrice de transition P en fonction de F.

2. On définit τ par

$$\tau = \inf \{n \geq 0, X_n = x_0\}.$$

   Montrer que $Y_n = X_{n \wedge \tau}$ est aussi une chaîne de Markov. Calculer sa matrice de transition en fonction de celle de X.

Exercice 2

1. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition $(P(x,y), x \in \mathbb{E}, y \in E)$ et de loi initiale (i.e. la loi de X_0) $(\mu(x), x \in \mathbb{E})$. Calculer la loi du vecteur $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et en déduire la loi de X_n.

2. Montrez que $P^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x)$. En particulier, montrez que si la chaîne part d'un point déterministe x_0 [i.e. $X_0 = x_0$ avec probabilité 1], alors

$$\mathbb{P}(X_n = y) = P^n(x_0, y).$$

3. Calculer la loi du couple (X_n, X_N), pour $n < N$, et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(f(X_N) | X_n = x\right) = P^{N-n} f(x),$$

   et, en particulier, que si $X_0 = x_0$ avec probabilité 1, $\mathbb{E}(f(X_N)) = P^N f(x_0)$.

Exercice 3 Soit $(X_n, n \geq 0)$ un processus de Markov de matrice de transition P sur un espace fini E. Pour une fonction f de E dans $\mathbb{R}$, on note $P^0 f(x) = f(x)$, puis récurence

$$P^{k+1} f(x) = \sum_{y \in E} P(x,y) P^k f(y).$$

1. Vérifier que P^k est bien la puissance k-ième (au sens du produit des matrices) de P.

On définit $u(n,x)$ par

$$u(n,x) = P^{N-n} f(x), x \in E, n \leq N,$$

2. Vérifier que l'on a

$$\begin{cases} u(N,x) &= f(x) \quad x \in E \\ u(n,x) &= \sum_{y \in E} P(x,y) u(n+1,y) \quad x \in E, n < N. \end{cases}$$

3. Montrer que $\mathbb{E}(u(n, X_n)) = \mathbb{E}(u(n+1, X_{n+1}))$ pour $0 \leq n < N$.

4. Redémontrer à partir de cette propriété, le résultat de l'exercice précédent: si la chaîne part de x_0 à l'instant 0, $\mathbb{E}(f(X_n)) = u(0, x_0) = P^N f(x_0)$.